INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

Épreuve de Mathématique III

3 heures

NOTATIONS

On considèrera des fonctions de variable réelle, à valeurs complexes, périodiques, admettant 2π comme période.
On dit qu'une telle fonction f est continue par morceaux si l'intervalle $]-\pi,\pi[$ peut être décomposé en un nombre fini (dépendant de f) de sous-intervalles (a_i, a_{i+1}) :

$$\pi = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_i < \ldots < a_n = \pi$$

tels que f soit continue sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, admette une limite à gauche de a_{i+1} :

$$f(a_{i+1}-) = \lim_{\substack{y \to a_{i+1} \\ <}} f(y)$$

et admette une limite à droite de a_i :

$$f(a_i+) = \lim_{\substack{y \to a_i \\ >}} f(y).$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux et $\mathcal{C}^0$ le sous-ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux si, en outre, f admet sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ une dérivée f' et si, en outre, cette dérivée admet une limite à gauche de a_{i+1} et une limite à droite de a_i.
On note $\mathfrak{E}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
On note $\mathfrak{D}$ [resp. $\mathfrak{F}$] le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ [resp. $\mathfrak{E}$] constitué des fonctions vérifiant en tout point :

$$2f(x) = f(x-) + f(x+).$$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on note :

$$c_p(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-ipt}}{2\pi}\, dt$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) e^{ipx}.$$

I. ÉTUDE GÉNÉRALE

1) Donner les relations d'inclusion qui lient les espaces :
$$\mathcal{C},\ \mathcal{C}^0,\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F}.$$

2) Montrer que les fonctions de $\mathcal{C}$ sont bornées.

3) En déduire l'existence des $c_p(f)$.

4) Montrer que, sur $\mathfrak{D}$:
$$\nu_1(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\ dt$$
est une norme.

5) Montrer que :
$$\nu_2(f) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\ dt \right)^{1/2}$$
est une norme euclidienne associée au produit scalaire hermitien :
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\ dt.$$

6) Montrer que $\left\{ \varepsilon_p = \dfrac{e^{ipt}}{\sqrt{2\pi}} : p \in \mathbb{Z} \right\}$ est un système orthonormé pour ce produit hermitien.

7) Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$2\pi \left(\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \nu_2(f).$$

8) En déduire que $c_k(f)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $\pm\infty$.

II. SOMMES DE DIRICHLET

L'espace $\mathcal{C}$ est muni de la loi de composition :

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\ dt$$

1) Cette loi de composition est-elle interne à $\mathcal{C}$? à $\mathcal{C}^0$?
2) Montrer que $f \star g = g \star f$.
3) Est-elle associative ?
4) Montrer que :

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi} f \star D_n$$

où :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

5) Montrer que :

$$D_n(x) = \frac{\sin\left[(2n+1)\dfrac{x}{2}\right]}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

6) Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\ dt = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\ dt \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Dans la suite, nous allons étudier une fonction continue dont les sommes de Fourier, $S_n(f)$, ne convergent pas ponctuellement vers f.

III. UNE ÉTUDE PARTICULIÈRE

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π périodique, telle que

$$\forall x \in [0,\pi]\,, f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[\left(2^{p^3}+1\right)\frac{x}{2}\right].$$

Vérifier l'existence et la continuité de f.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n,k} = \int_0^{\pi} \cos nt\ \sin\frac{(2k+1)t}{2}\ dt,$$

$$\forall q \in \mathbb{N}, s_{q,k} = \sum_{i=0}^{q} x_{i,k}$$

Montrer que

$$x_{n,k} = \frac{k+\dfrac{1}{2}}{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k+\dfrac{1}{2}} - \frac{1}{n-k-\dfrac{1}{2}}\right)$$

3) Montrer que, si $q \geqslant k$

$$2s_{q,k} = \frac{1}{k+\dfrac{1}{2}} + \sum_{i=q-k}^{q+k} \frac{1}{i+\dfrac{1}{2}}$$

4) En déduire que $s_{q,k} \geqslant 0$, pour tout $(q,k) \in \mathbb{N}^2$.

5) Montrer que $2s_{k,k} \geqslant \sum_{i=0}^{2k} \int_{i+\frac{1}{2}}^{i+\frac{3}{2}} \dfrac{dt}{t}$

6) En déduire que : $s_{k,k} \geqslant \dfrac{\ln k}{2}$

7) On s'intéresse à la série de Fourier de f en 0 :

$$S_n = S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$$

et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos(kt)}{\pi}\, dt$$

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p^2}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left[\left(2^{p^3}+1\right)\frac{t}{2}\right]\cos nt\, dt,$

(en justifiant soigneusement cette formule) et calculer $a_k(f)$ en fontion des $s_{p,q}$.

8) Montrer que

$$S_n(f)(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}s_{n,2^{p^3-1}}$$

9) En déduire que

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2^{p^3-1}} \geqslant \frac{1}{p^2}S_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \geqslant \frac{1}{2p^2}\log\left(2^{p^3-1}\right) = \frac{p^3-1}{2p^2}\log 2$$

10) Ceci montre que $S_{2^{p^3-1}} \to +\infty$, conclure.

IV. ÉTUDE D'UN EXEMPLE ET RETOUR SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DIRICHLET

On considère la fonction 2π-périodique

$$\begin{array}{lll} f(x) = -\pi - x & \text{si} & -\pi \leqslant x < 0 \\ f(x) = \pi - x & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{array}$$

1) Calculer ses coefficients de Fourier.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)| = +\infty$ et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 < \infty$.

3) Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{p=1}^{m}\frac{\sin(px)}{p}\right|$ est majoré par une constante indépendante de m et de x.

4) Montrer que, si l'on pose

$$g_1(t) = \begin{cases} h(x-t)\operatorname{cotg}\left(\dfrac{t}{2}\right) & \text{si } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi \\ 0 \text{ si } |t| \leqslant \delta \end{cases}$$

et

$$g_2(t) = \begin{cases} h(x-t)\operatorname{cotg}\left(\dfrac{t}{2}\right) & \text{si } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi \\ 0 \text{ si } |t| \leqslant \delta \end{cases}$$

et si $h \in \mathcal{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} h(x-t)D_n(t)\frac{dt}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} g_1(t)\sin(nt)\frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} g_2(t)\cos(nt)\frac{dt}{2\pi} \\ &= \operatorname{Im}\left[\int_{-\pi}^{\pi} g_1(t)e^{int}\frac{dt}{2\pi}\right] + \operatorname{Re}\left[\int_{-\pi}^{\pi} g_2(t)e^{int}\frac{dt}{2\pi}\right] \end{aligned}$$

5) Montrer que les deux intégrales tendent vers 0 si n tend vers l'infini.

6) En déduire une démonstration du théorème de Dirichlet pour les fonctions de $\mathcal{C}$.